

Connaissances requises en mathématiques

1 - Algèbre

1.1 (+) Théorie des ensembles. Opérations sur les ensembles, fonctions indicatrices. Application, injectivité, surjectivité. Image directe et image réciproque d'un ensemble. Nombres entiers, ensembles finis, dénombrabilité.

1.2 (+) Nombres réels, nombres complexes, exponentielle complexe. Application à la géométrie plane et à la trigonométrie. Polynômes, relations entre les racines et les coefficients. Arithmétique élémentaire dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ordre sur \mathbb{R} . Maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.

1.3 (+) Espaces vectoriels de dimension finie. Familles libres, familles génératrices, bases, dimension. Déterminant de n vecteurs, caractérisation des bases. Matrices, opérations sur les matrices (multiplication, inversion, rang, etc.). Déterminant et trace d'une matrice carrée. Application linéaire. Matrice associée à une application linéaire. Systèmes d'équations linéaires.

1.4.1 (++) Diagonalisation de matrices. Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée. Sous-espaces stables. Matrices semblables, interprétation géométrique. Polynôme caractéristique.

1.4.2 (+++) Polynôme minimal, théorème de Cayley-Hamilton.

1.5 (++) Espace euclidien, géométrie euclidienne, produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz. Normes et distances associées. Espaces euclidiens de dimension finie, bases orthonormées. Projection orthogonale. Matrice orthogonale. Diagonalisation de matrices symétriques réelles.

2 - Analyse et géométrie différentielle

2.1 (++) Espaces vectoriels normés de dimension finie. Équivalence de normes, ensembles ouverts ou fermés, boule ouverte ou fermée. Suites convergentes dans des espaces vectoriels normés, applications continues. Ensemble compact, image d'un ensemble compact par une applications continue, existence d'extrema.

2.2.1 (+) Fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle. Dérivée en un point, fonctions de classe C^k . Théorème des accroissements finis, formule de Taylor, développements limités. Primitive de fonction continue. Fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques, fractions rationnelles).

2.2.2 (++) Suites et séries de fonctions, convergence simple et uniforme.

2.3.1 (+) Intégration sur un intervalle borné. Intégrale de fonctions continues par morceaux. Théorème fondamental du calcul différentiel. Intégration par partie, changement de variables. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Intégrale impropre.

2.3.2 (++) Intégrale dépendant d'un paramètre. Continuité sous le signe \int , dérivation sous le signe \int .

2.4.1 (+) Séries de nombres réels ou complexes, convergence simple ou absolue. Critère de comparaison d'intégrales.

2.4.2 (++) Produit de séries absolument convergentes. Séries entières, rayon de convergence. Fonction pouvant être développée en série entière sur un intervalle. Développement en séries entières des fonctions usuelles : $\exp(t)$, $\sin(t)$, $\cos(t)$, $\ln(1+t)$, $(1+t)^a$, où a est un nombre réel.

2.5.1 (+) Équations différentielles. Équations scalaires linéaires d'ordre 1 ou 2. Équation homogène, méthode de séparation des variables. Solution particulière, méthode de variation de la constante. Problème de Cauchy.

2.5.2 (++) Systèmes linéaires avec coefficients constants. Notions sur les équations différentielles non linéaires.

2.6.1 (++) Fonctions de plusieurs variables réelles. Dérivées partielles, différentielle d'une fonction définie sur \mathbb{R}^n . Dérivation d'une fonction composée. Fonctions de classe C^k . Théorème de Schwarz.

2.6.2 (+++) Difféomorphismes, théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Points critiques, extrema locaux ou globaux.

2.6.3 (+++) Intégrales doubles. Calcul d'intégrales doubles par le théorème de Fubini ou par un changement de variables (par ex. passage en coordonnées polaires).

2.6.4 (++) Courbe plane, vecteur tangent en un point, longueur d'une courbe plane.

2.7.1 (+) Probabilité, probabilité conditionnelle, événements indépendants.

2.7.2 (++) Variable aléatoire, espérance. Variable aléatoire gaussienne, moyenne, variance.